



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



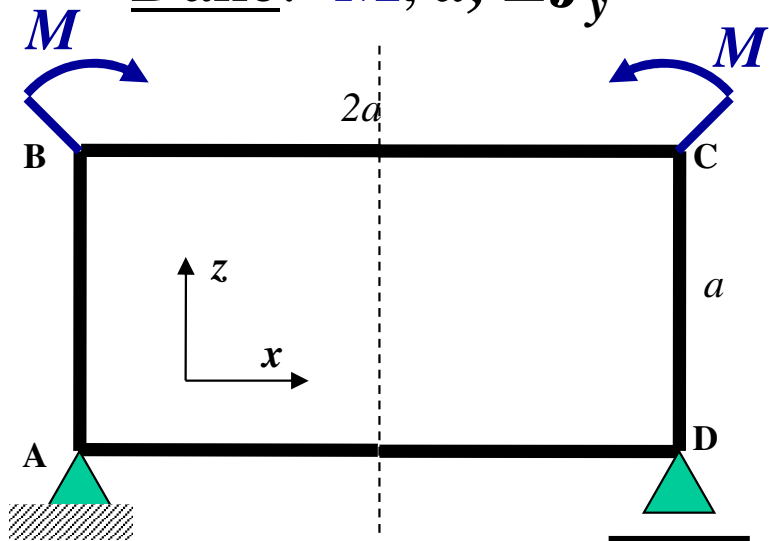
Wykład 7

Konstrukcje prętowe statycznie niewyznaczalne

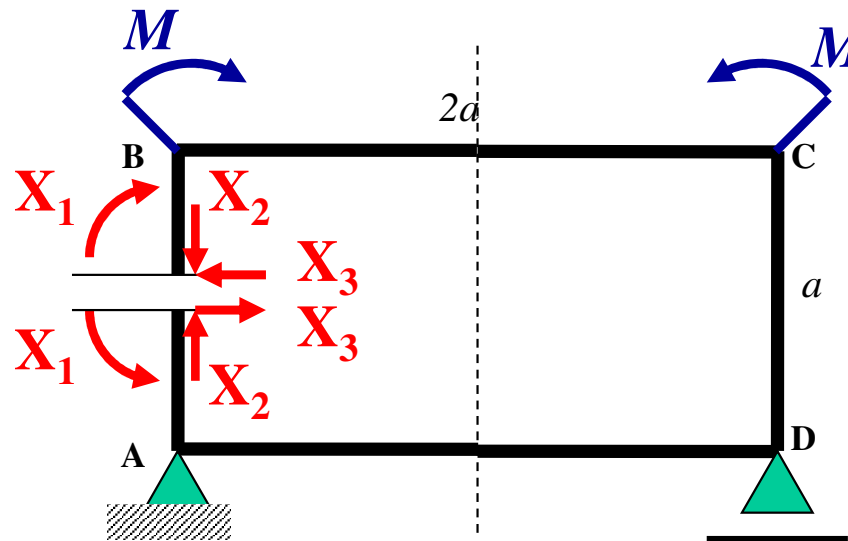
Uproszczenia wynikające z zasady
jednoznaczności rozwiązania
(przykłady)

Przykład.1. Rozwiązać ramę ściśle płaską statycznie niewyznaczalną wewnątrz

Dane: M, a, EJ_y



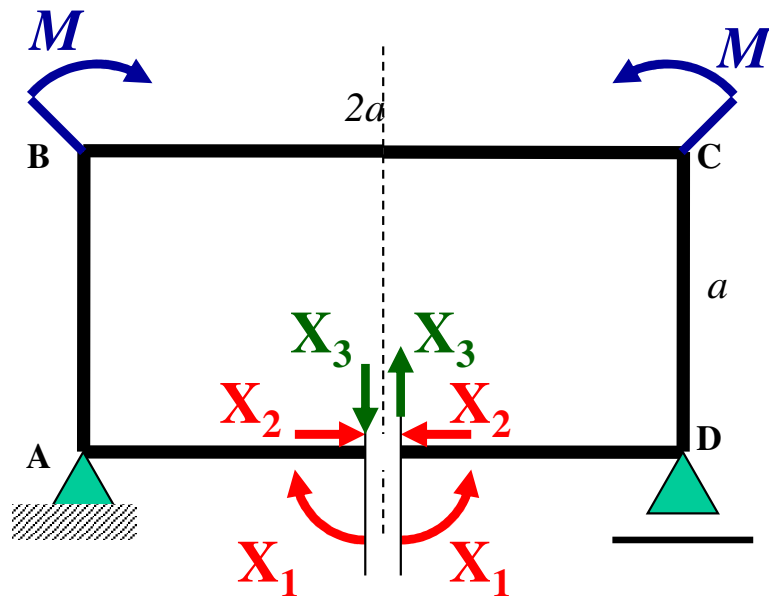
WYMYŚLAMY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



Zadanie statycznie wyznaczalne zewnętrznie ale **statycznie niewyznaczalne wewnątrz**

Zadanie statycznie wyznaczalne zewnętrznie ale **3 krotnie statycznie niewyznaczalne wewnątrz!**

WYMYŚLAMY LEPSZY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



W ustroju liniowym i sprężystym jeden stan obciążenia wywołuje tylko jeden stan sił wewnętrznych!

Konstrukcja symetryczna i obciążenie symetryczne!
Jeśli przetniemy na osi symetrii, to istnieją **tylko składowe symetryczne sił wewnętrznych:**

$$X_1 \neq 0 \quad X_2 \neq 0$$

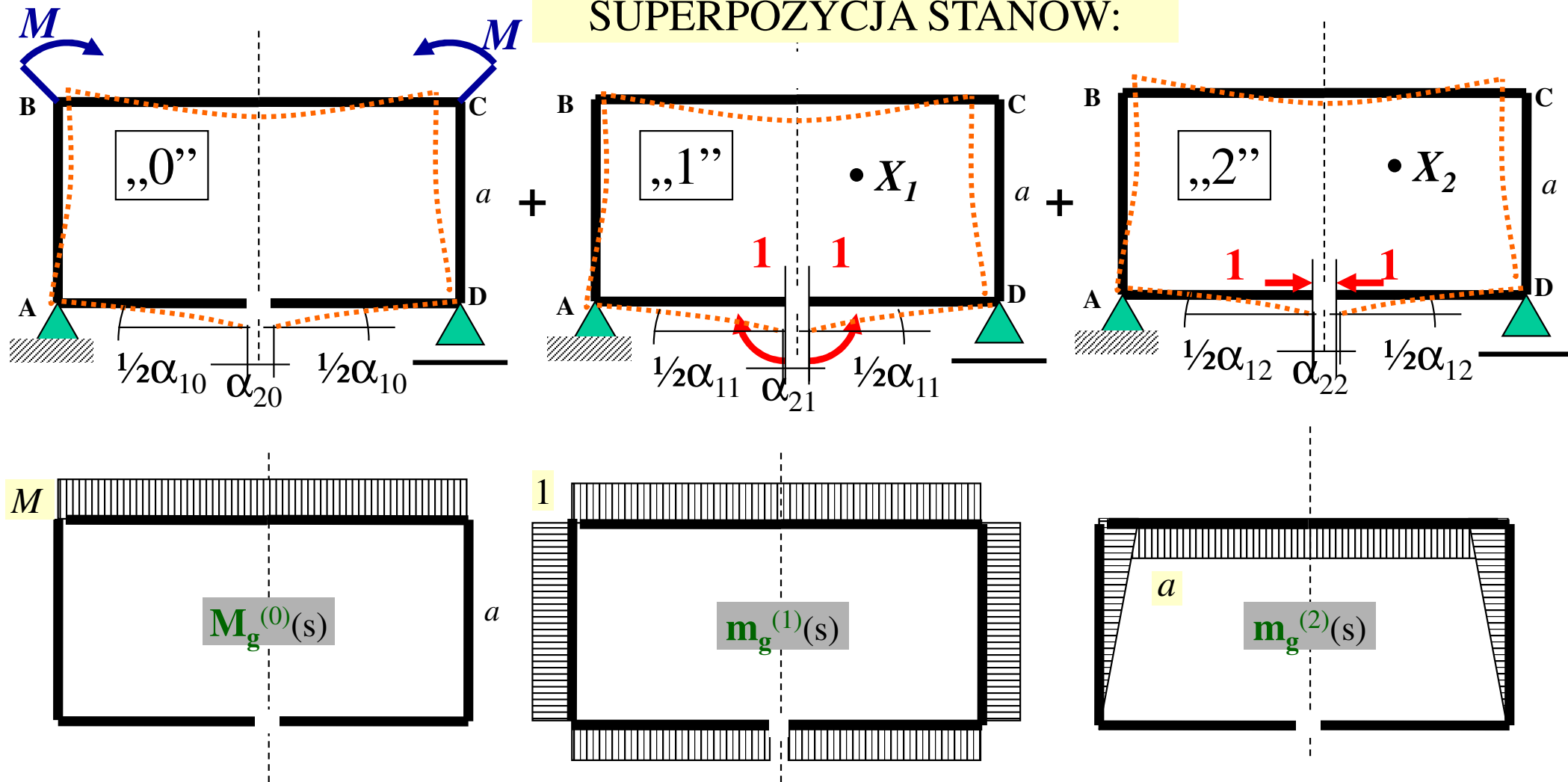
składowe symetryczne

$$X_3 = 0$$

składowa antysymetryczna

Przykład.1. Rama ściśle płaska statycznie niewyznaczalna wewnętrznie

SUPERPOZYCJA STANÓW:

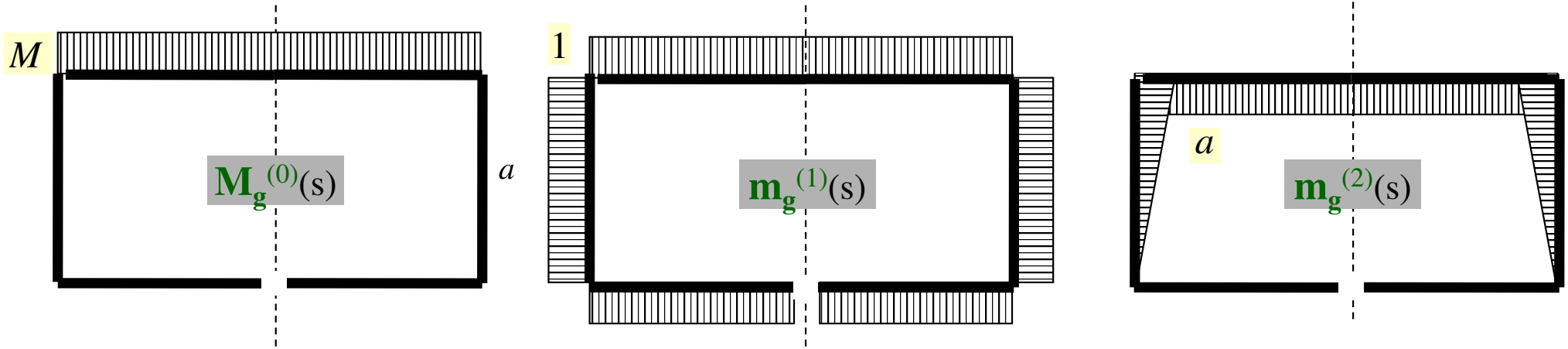


Warunki zerowych przemieszczeń dla uwolnionych stopni swobody:

$$\begin{aligned} \alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 + \alpha_{12} \cdot X_2 &= 0 \\ \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot X_1 + \alpha_{22} \cdot X_2 &= 0 \end{aligned}$$

Układ równań kanonicznych metody sił Maxwella-Mohra

Przykład.1. Rama płaska statycznie niewyznaczalna wewnątrz



Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

$$\alpha_{11} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(1)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} a \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 = \frac{6a}{EJ_y}$$

$$\alpha_{12} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left(-\frac{1}{2} a^2 \cdot 1 \cdot 2 - 2a^2 \cdot 1 \right) = -\frac{3a^2}{EJ_y}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}$$

$$\alpha_{22} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left(\frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a \cdot 2 + 2a^2 \cdot a \right) = \frac{8a^3}{3EJ_y}$$

$$\alpha_{10} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot M^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} 2aM \cdot 1 = \frac{2Ma}{EJ_y}$$

$$\alpha_{20} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot M^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} 2aM \cdot (-a) = -\frac{2Ma^2}{EJ_y}$$

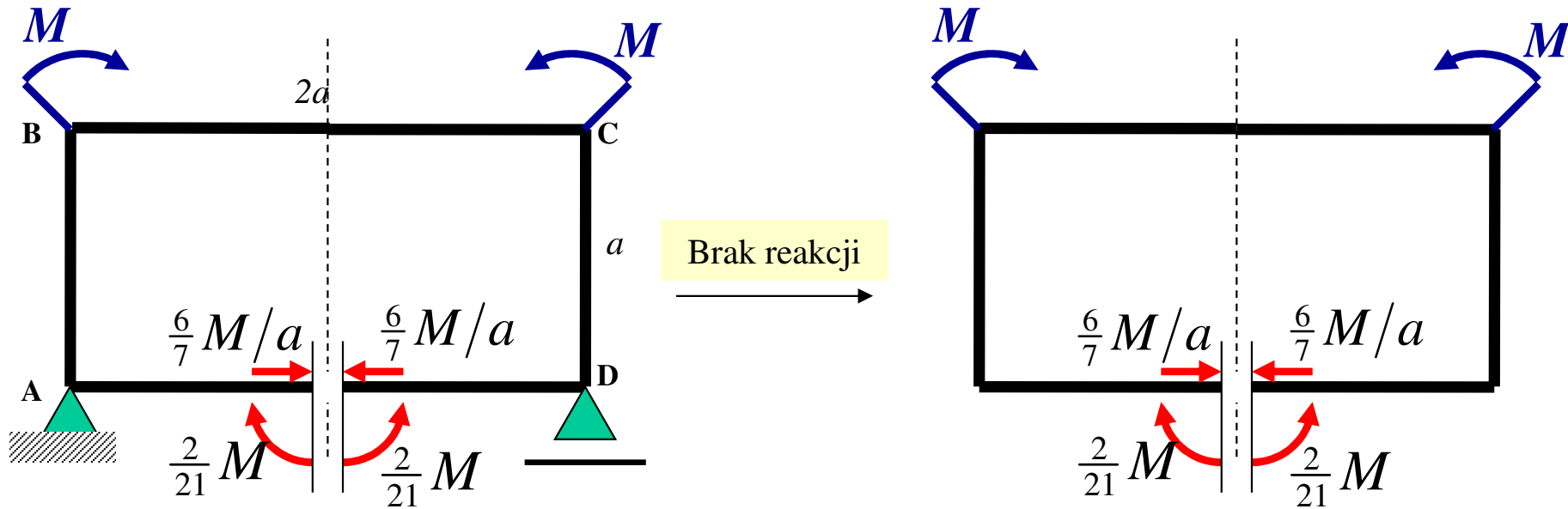
$$\frac{2Ma}{EJ_y} + \frac{6a}{EJ_y} \cdot X_1 + \frac{3a^2}{EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

$$\frac{-2Ma^2}{EJ_y} + \frac{3a^2}{EJ_y} \cdot X_1 + \frac{8a^3}{3EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

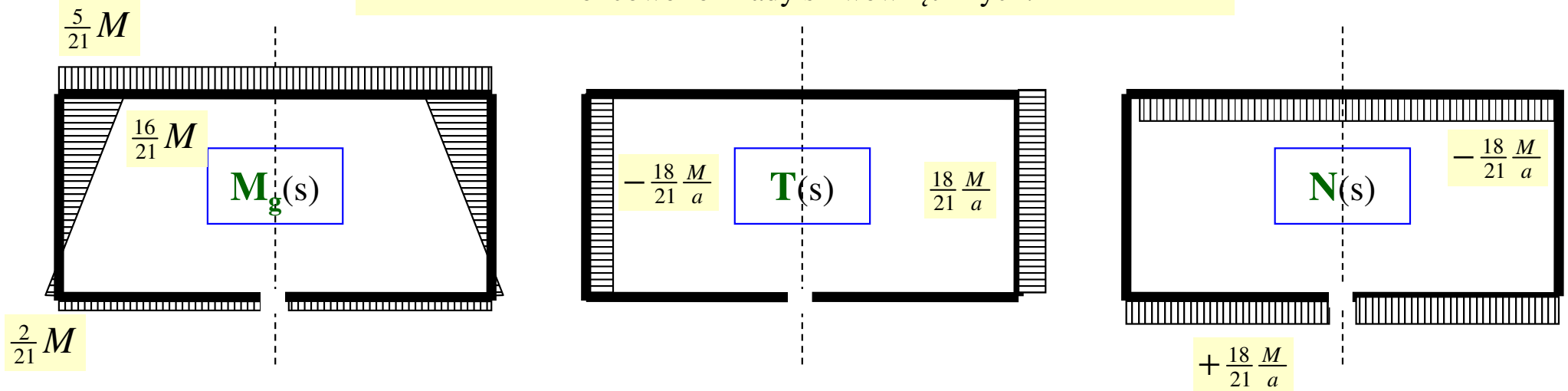
$$X_1 = \frac{2}{21} M$$

$$X_2 = \frac{6M}{7a}$$

Przykład.1. Rama płaska statycznie niewyznaczalna wewnątrz

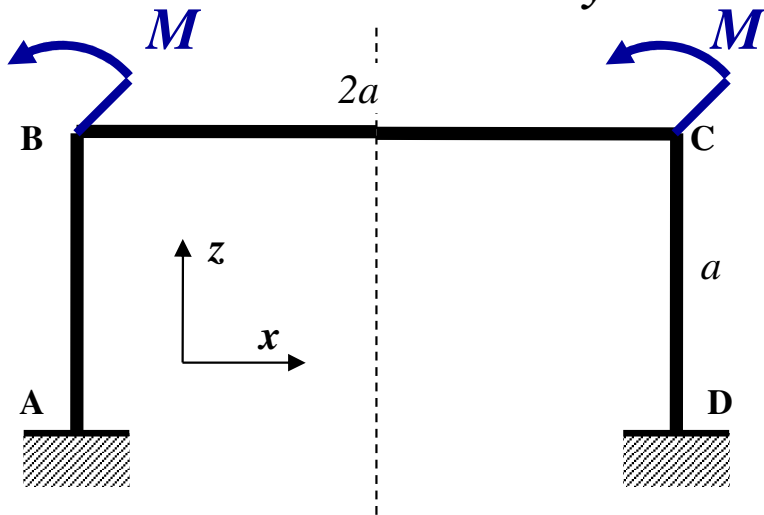


Końcowe rozkłady sił wewnętrznych:

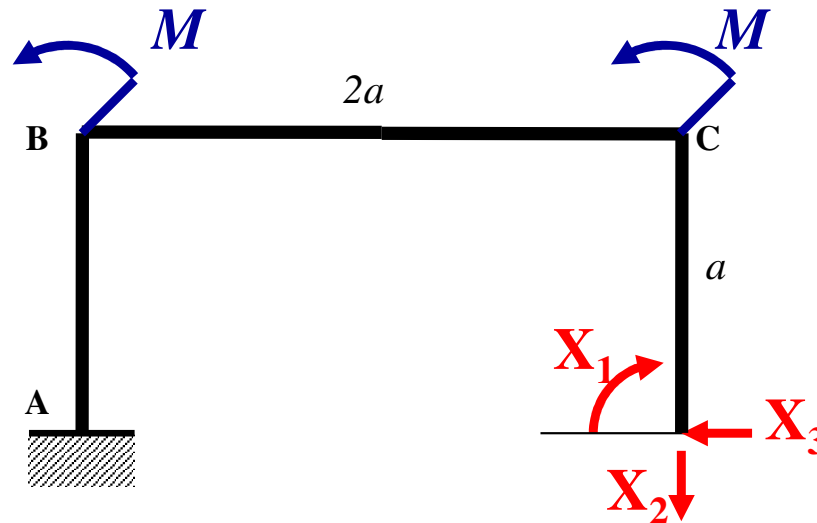


Przykład.2. Rozwiązać ramę ściśle płaską statycznie niewyznaczalną

Dane: M, a, EJ_y

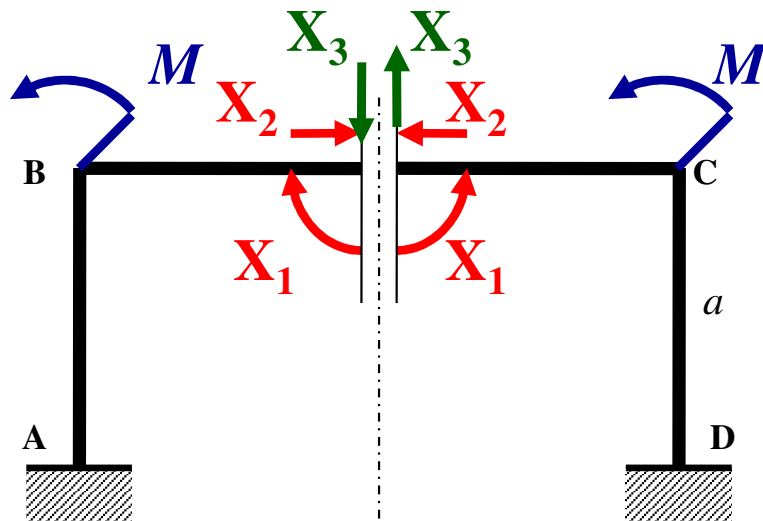


RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



Zadanie 3 krotnie statycznie niewyznaczalne zewnętrznie !

WYMYŚLAMY LEPSZY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



Konstrukcja symetryczna a obciążenie antysymetryczne!

Jeśli przetniemy na osi symetrii, to istnieją tylko składowe antysymetryczne sił wewnętrznych:

$$X_1 = 0 \quad X_2 = 0$$

składowe symetryczne

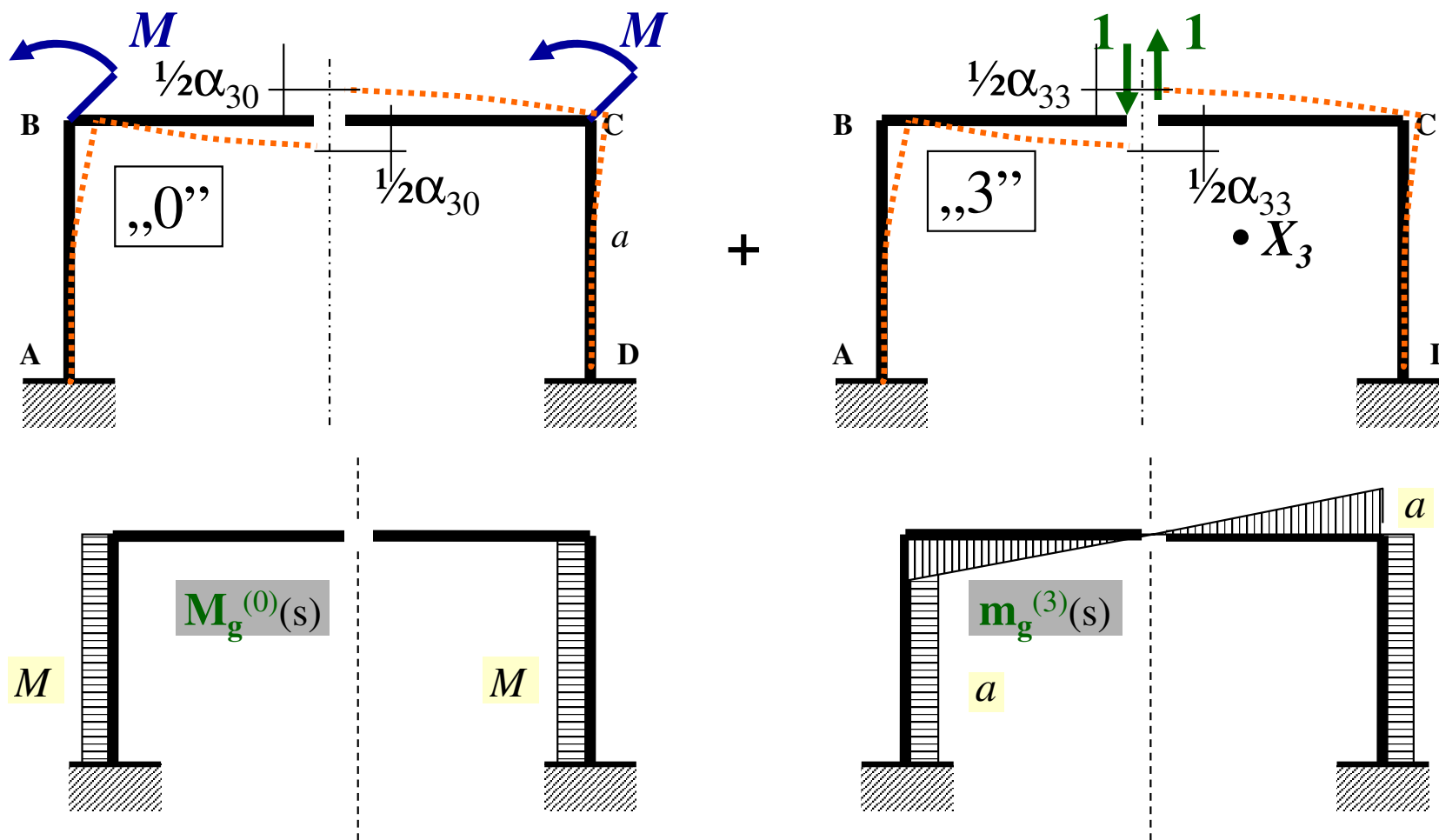
$$X_3 \neq 0$$

składowe antysymetryczne

Zadanie 1 krotnie statycznie niewyznaczalne wewnętrznie !

Przykład.2. Rama ściśle płaska statycznie niewyznaczalna wewnętrznie

SUPERPOZYCJA STANÓW:

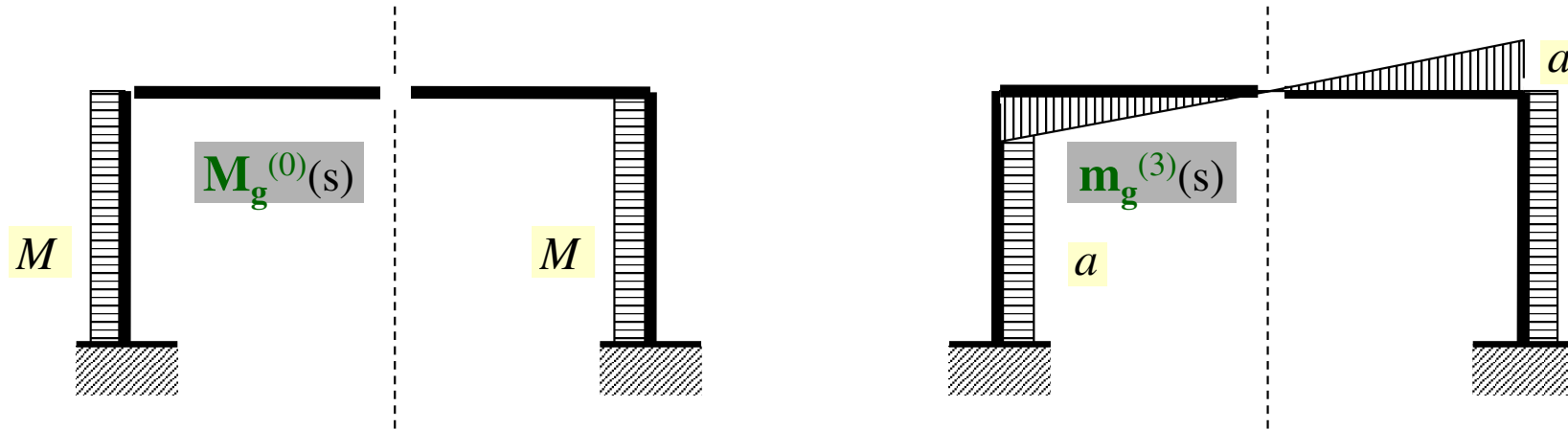


Warunki zerowych przemieszczeń dla uwolnionych stopni swobody:

$$\alpha_{30} + \alpha_{33} \cdot X_3 = 0$$

Równanie kanoniczne metody sił Maxwella-Mohra

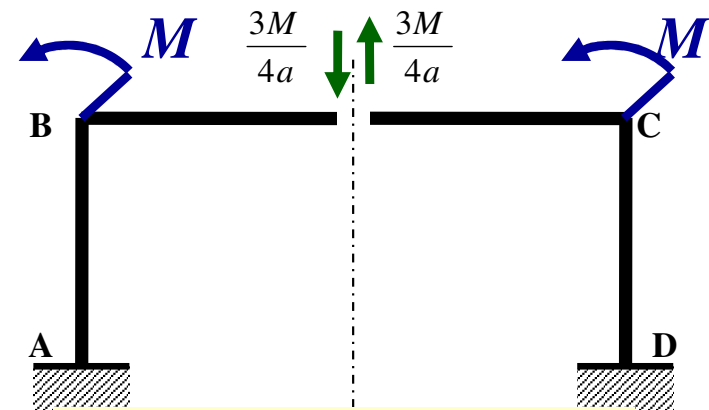
Przykład.2. Rama ściśle płaska statycznie niewyznaczalna wewnątrznie



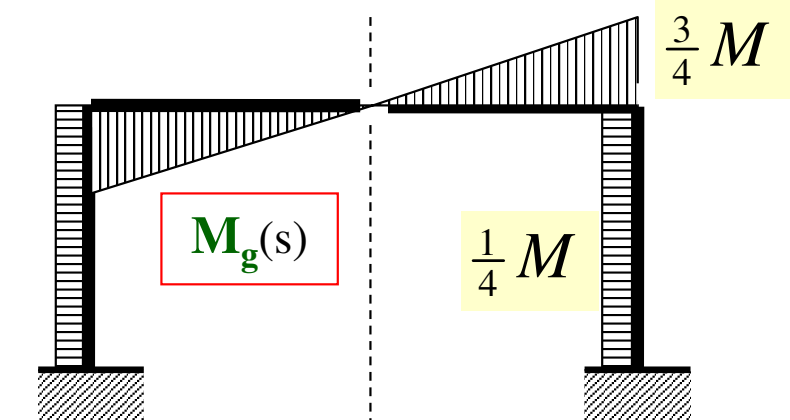
Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

$$\alpha_{33} \equiv \int_l \frac{m^{(3)} \cdot m^{(3)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left(\frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a + a^2 \cdot a \right) \cdot 2 = \frac{8a^3}{3EJ_y}$$

$$\alpha_{30} \equiv \int_l \frac{m^{(3)} \cdot M^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} (aM \cdot (-a)) \cdot 2 = -\frac{2Ma^2}{EJ_y}$$



RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY

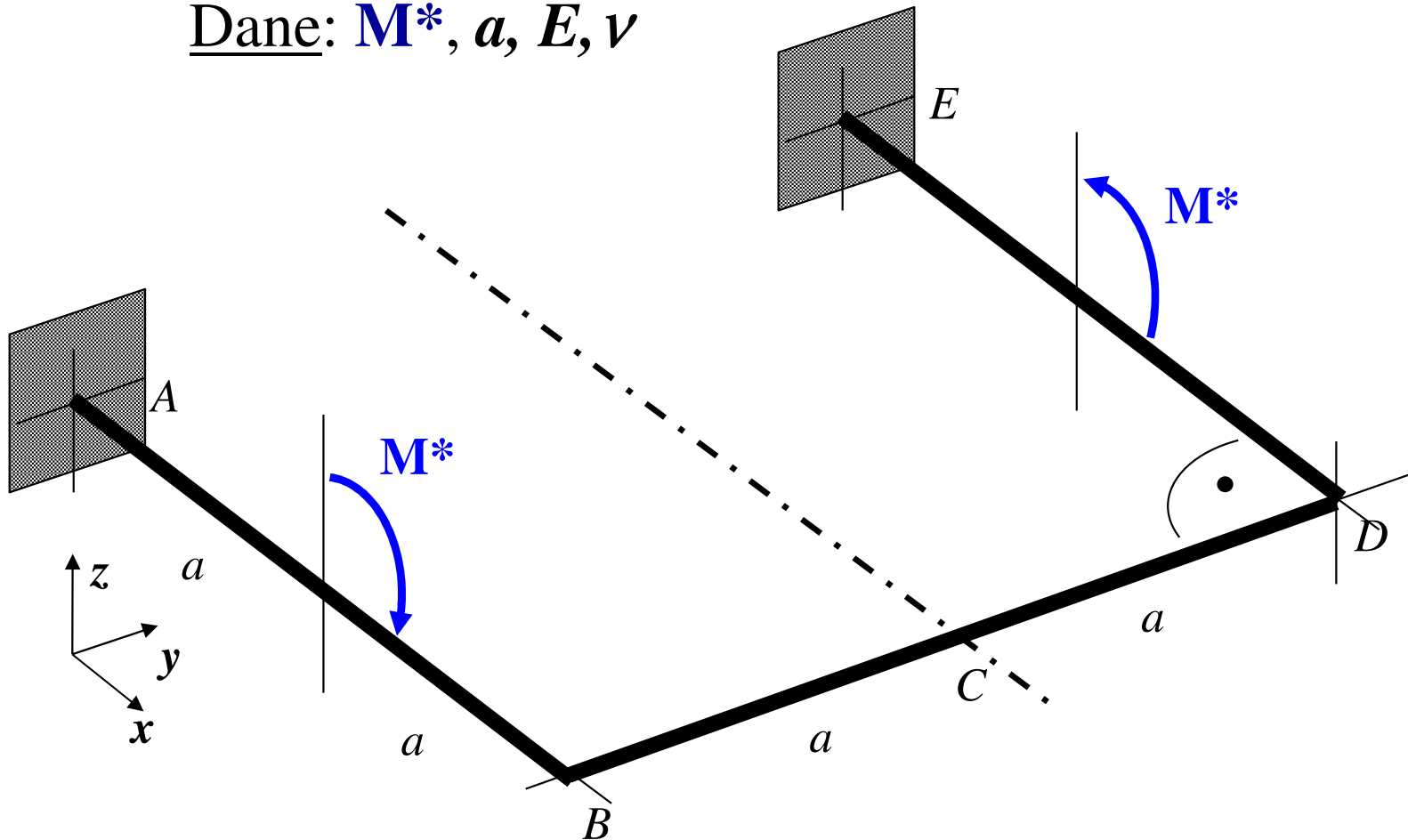


Końcowe rozkłady momentów gnących

$$\frac{2Ma^2}{EJ_y} + \frac{8a^3}{3EJ_y} \cdot X_3 = 0 \quad \rightarrow \quad X_3 = \frac{3M}{4a}$$

Przykład.3. Rozwiązać ramę płaską statycznie niewyznaczalną obciążoną niepłasko

Dane: M^* , a , E , ν

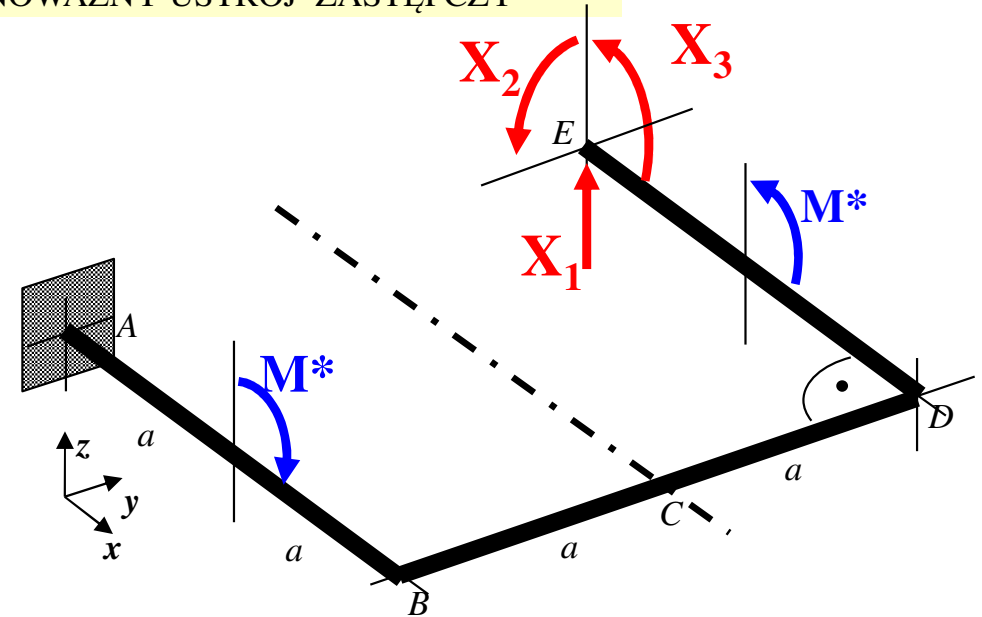
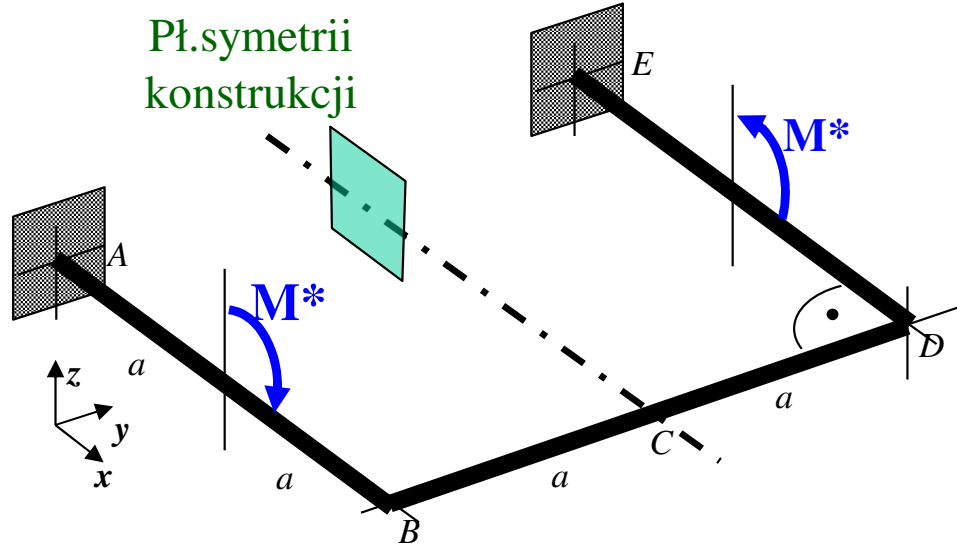


Charakterystyki przekroju:

$$GJ_s = \frac{10}{13} EJ_y$$

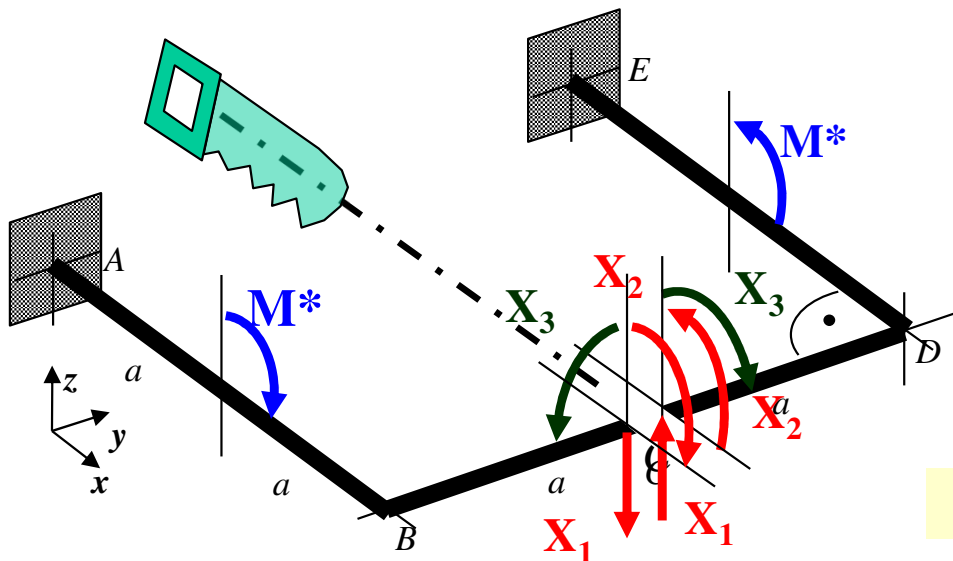
Przykład.3. Rama płaska statycznie niewyznaczalna obciążona niepełasko

RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



Zadanie 3 krotnie statycznie niewyznaczalne zewnątrz !

WYMYŚLAMY **LEPSZY** RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



Konstrukcja symetryczna a obciążenie antysymetryczne!
Jeśli przetniemy w płaszczyźnie symetrii, to istnieją tylko składowe antysymetryczne sił wewnętrznych:

$$X_1 \neq 0 \quad X_2 \neq 0$$

składowe antysymetryczne

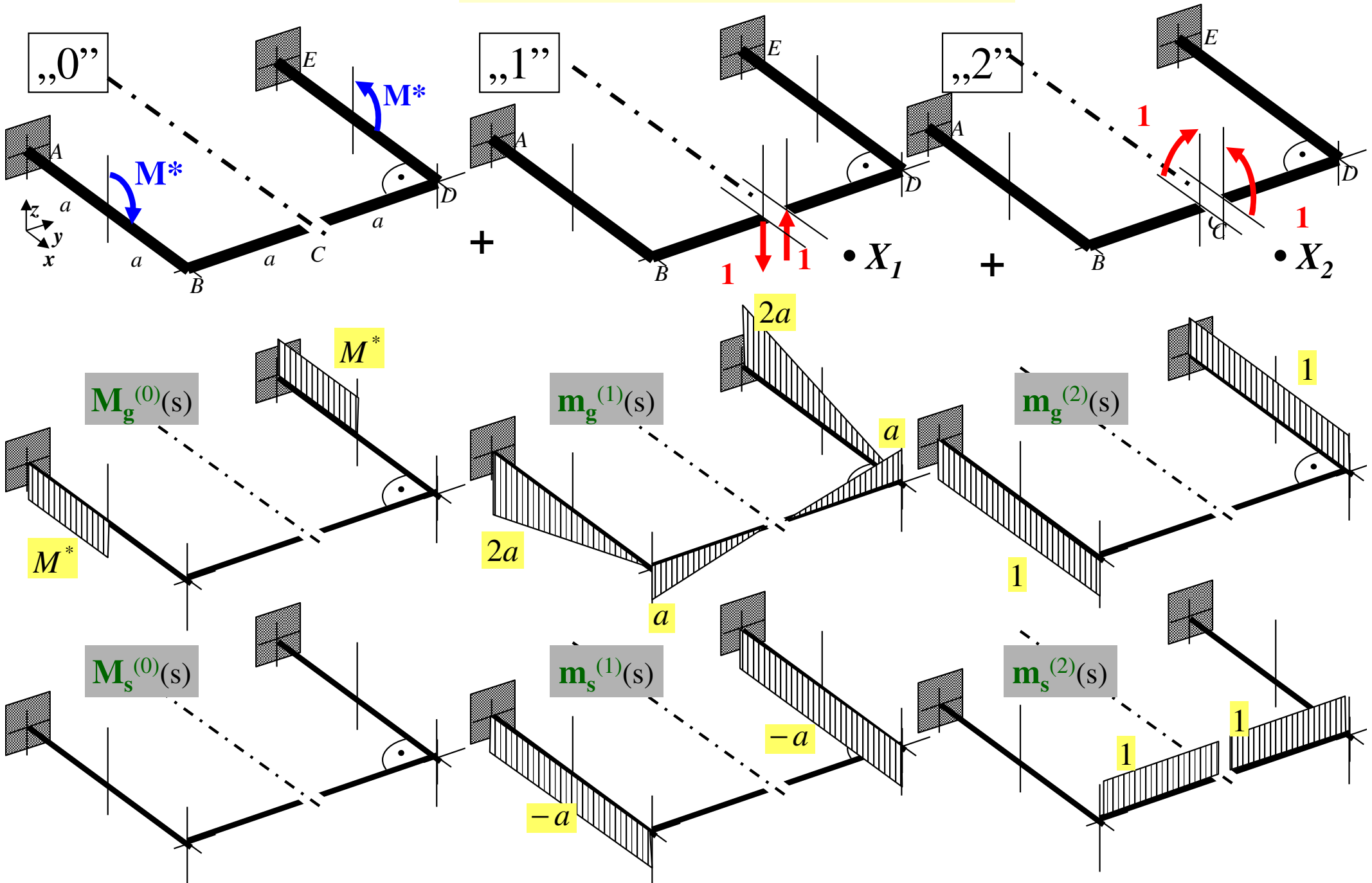
$$X_3 = 0$$

składowe symetryczne

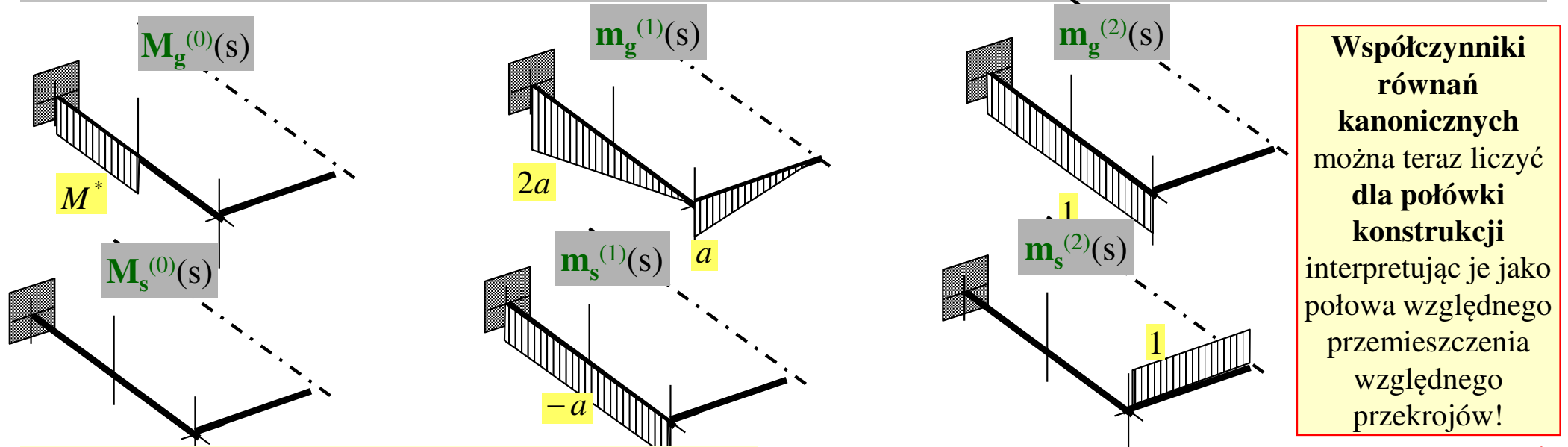
Zadanie 2 krotnie statycznie niewyznaczalna wewnątrz !

Przykład.3. Rama płaska statycznie niewyznaczalna obciążona niepunktowo

SUPERPOZYCJA STANÓW:



Przykład.3. Rama płaska statycznie niewyznaczalna obciążona niepunktowo



Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

$$\alpha_{11} \cong \frac{1}{EJ_y} \left(\frac{1}{2} (2a)^2 \cdot \frac{2}{3} 2a + \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a \right) + \frac{1}{GJ_s} 2a^3 = \frac{3a^3}{EJ_y} + \frac{13}{10} \frac{2a^3}{EJ_y} = \frac{56a^3}{10EJ_y}$$

$$\alpha_{12} \cong \frac{1}{EJ_y} \frac{1}{2} (2a)^2 \cdot a + 0 = \frac{2a^2}{EJ_y}$$

$$\alpha_{22} \cong \frac{1}{EJ_y} 2a \cdot 1 + \frac{1}{GJ_s} a \cdot 1 = \frac{2a}{EJ_y} + \frac{13}{10} \frac{a}{EJ_y} = \frac{33a}{10EJ_y}$$

$$\alpha_{10} \cong \frac{1}{EJ_y} M^* a \frac{3}{4} 2a + 0 = \frac{3M^* a^2}{2EJ_y}$$

$$\alpha_{20} \cong \frac{1}{EJ_y} M^* a \cdot 1 + 0 = \frac{M^* a}{EJ_y}$$

$$\frac{3M^* a^2}{2EJ_y} + \frac{56a^3}{10EJ_y} \cdot X_1 + \frac{2a^2}{EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

$$\frac{M^* a}{EJ_y} + \frac{2a^2}{EJ_y} \cdot X_1 + \frac{33a}{10EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

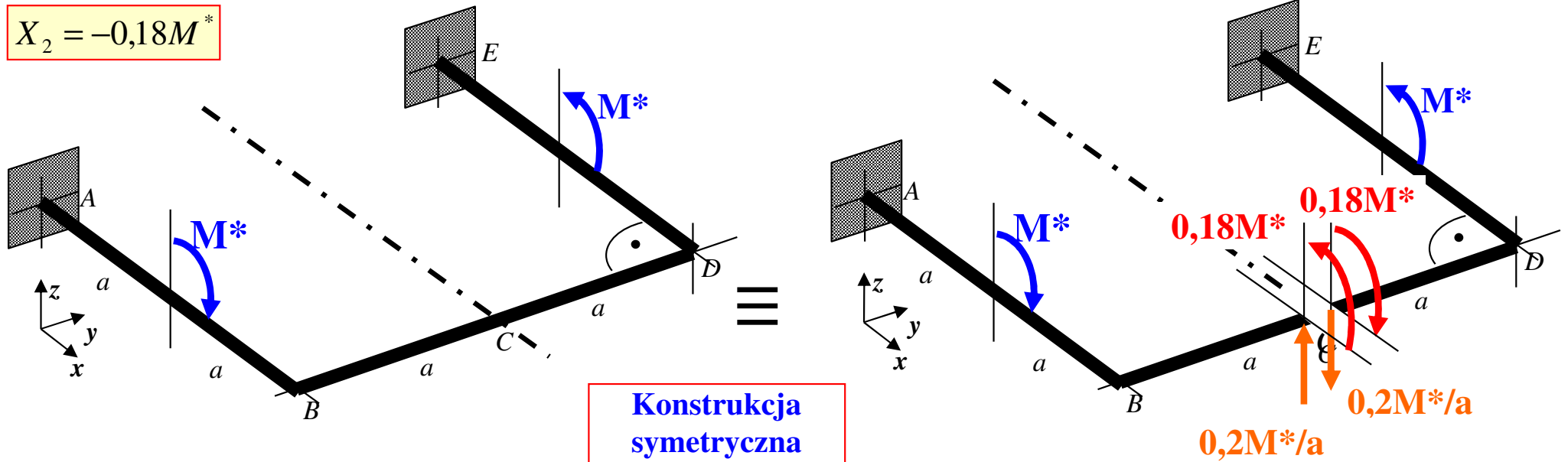
→ $X_1 = -0,2 M^* / a$ $X_2 = -0,18 M^*$

Przykład.3. Rama płaska statycznie niewyznaczalna obciążona niepunktowo

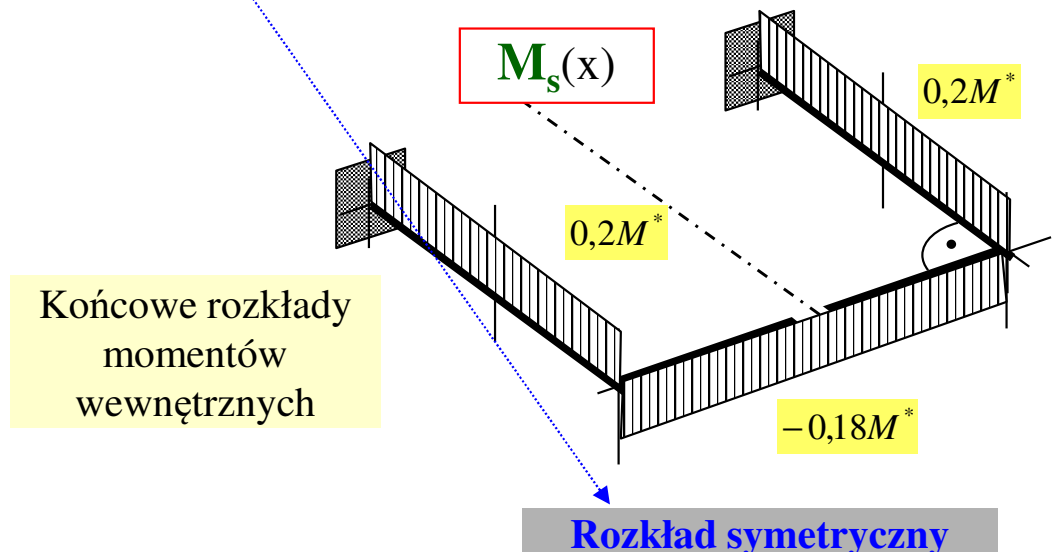
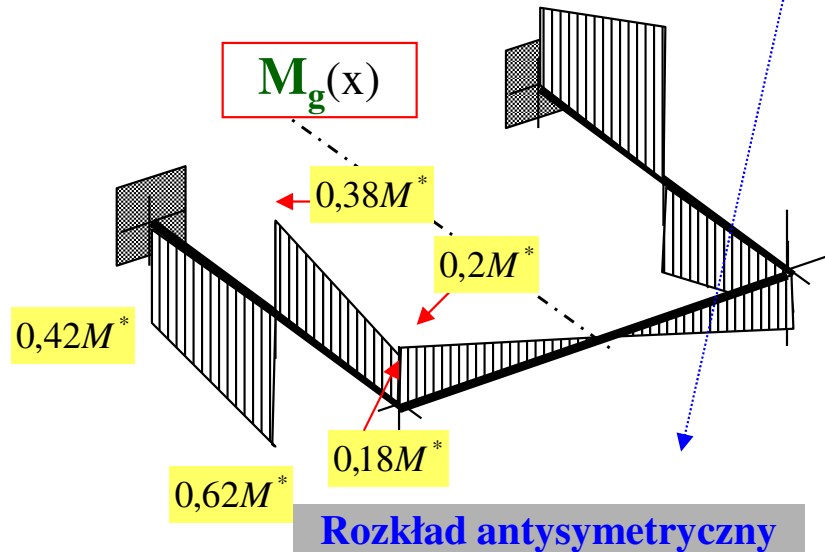
$$X_1 = -0,2M^*/a$$

$$X_2 = -0,18M^*$$

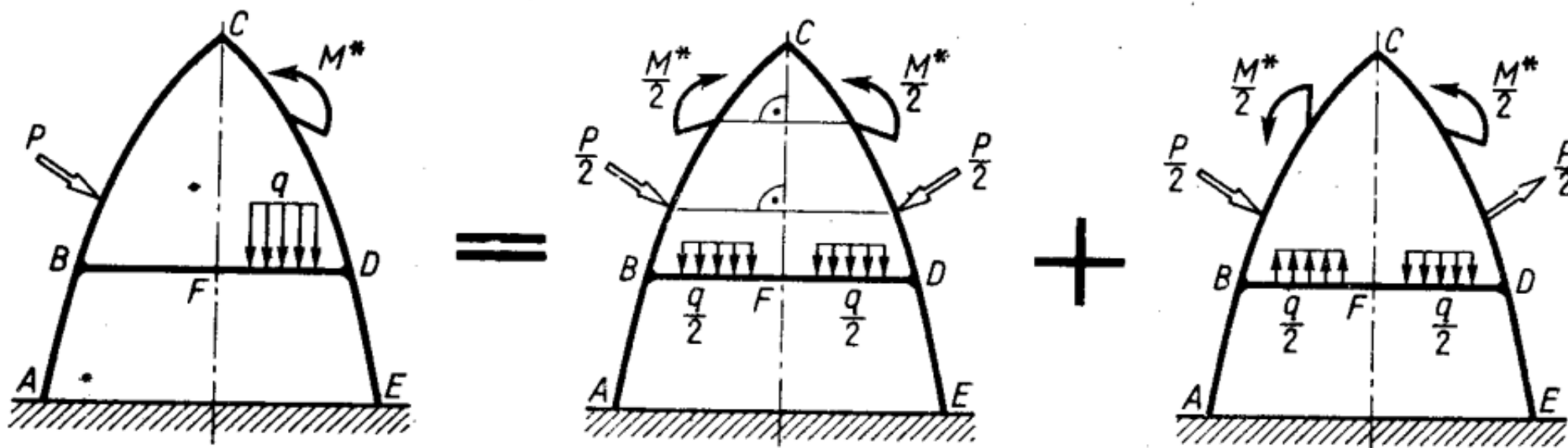
RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY:



Konstrukcja symetryczna a obciążenie antysymetryczne

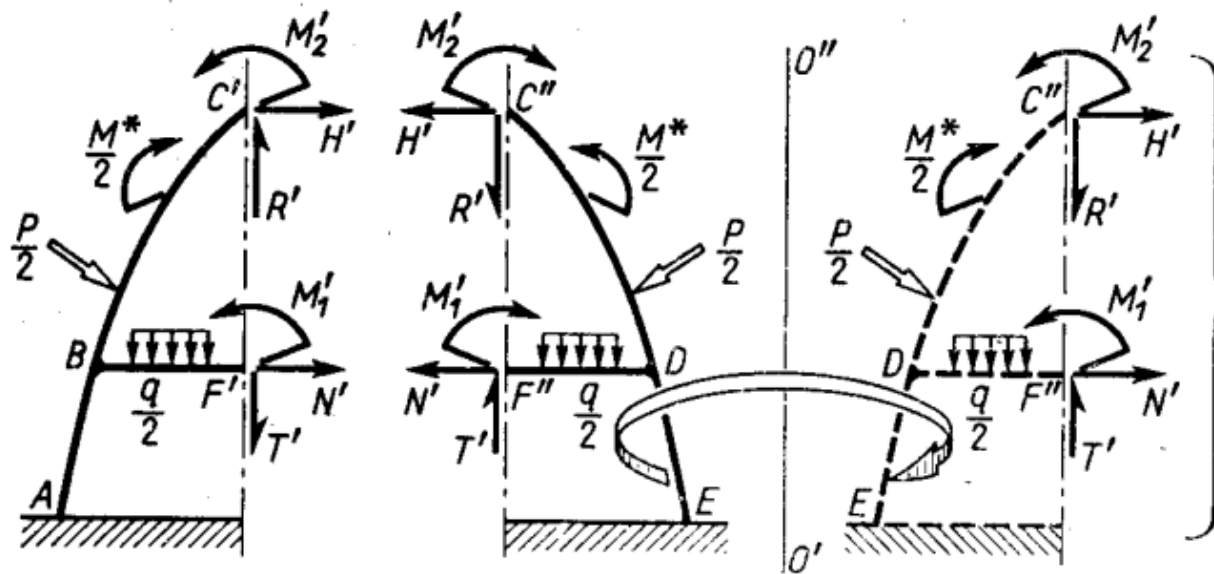


Rozkład obciążenia na symetryczne i antysymetryczne



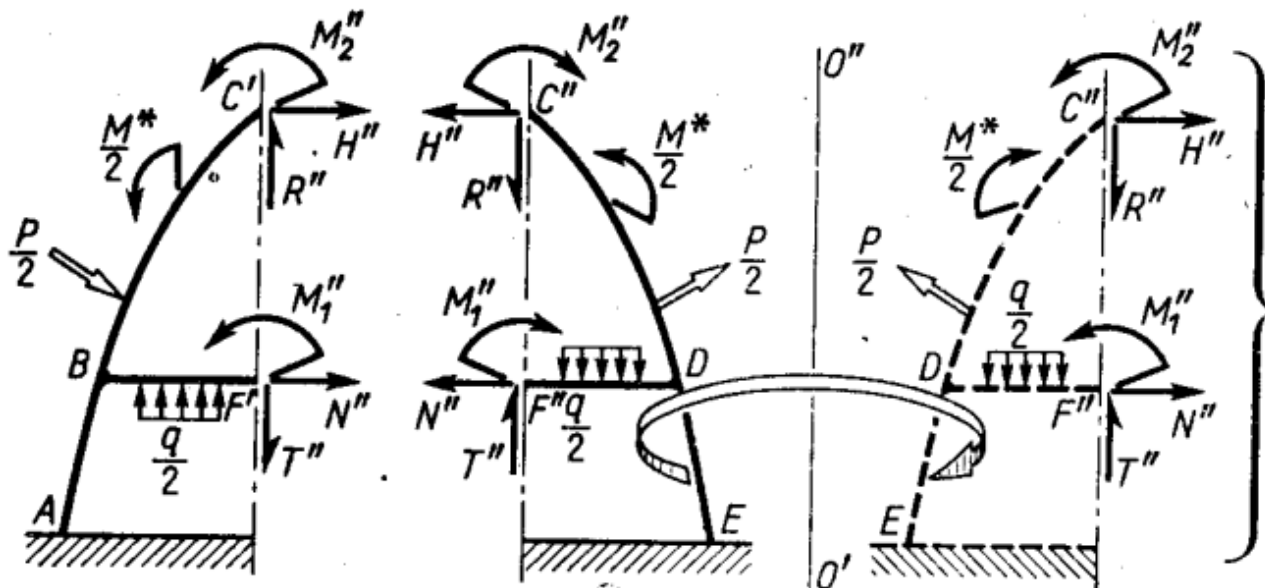
Rys. 10.10. Rozkład obciążenia na symetryczne i antysymetryczne

Cechy obciążeń symetrycznego i antysymetrycznego



Po obrocie względem osi $O'O''$ prawa połowka staje się kopią lewej tak samo obciążoną. Z zasady jednoznaczności siły wewnętrzne muszą być te same. Aby tak było, musi być $R'=T'=0$.

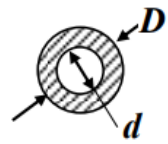
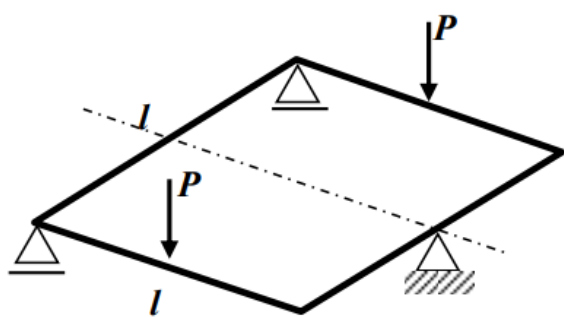
Rys. 10.11. Oddziaływania w płaszczyźnie symetrii przy obciążeniu symetrycznym



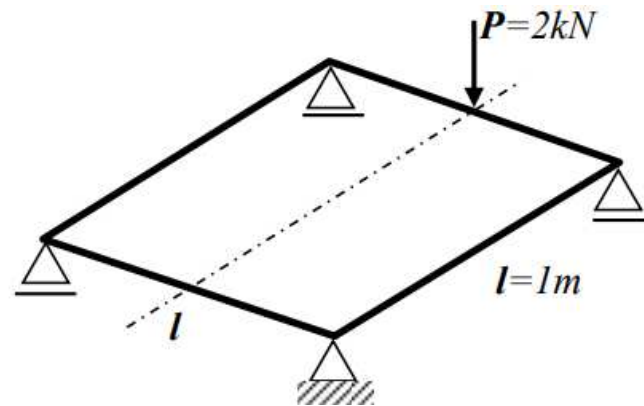
Po obrocie względem osi $O'O''$ prawa połowka staje się kopią lewej odwrotnie obciążoną. Z zasady jednoznaczności siły wewnętrzne muszą być przeciwne. Aby tak było, musi być $M_1''=M_2''=0$ i $N''=H''=0$.

Rys. 10.12. Oddziaływania w płaszczyźnie symetrii przy obciążeniu antysymetrycznym

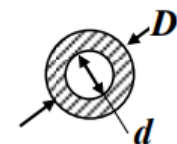
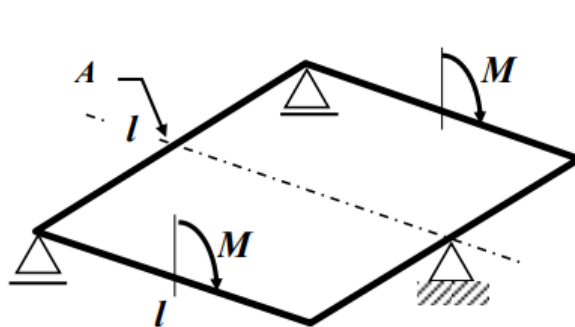
Przykład zadań z egzaminów (*symetria konstr.* i *symetria obciążenia*)



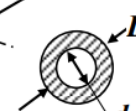
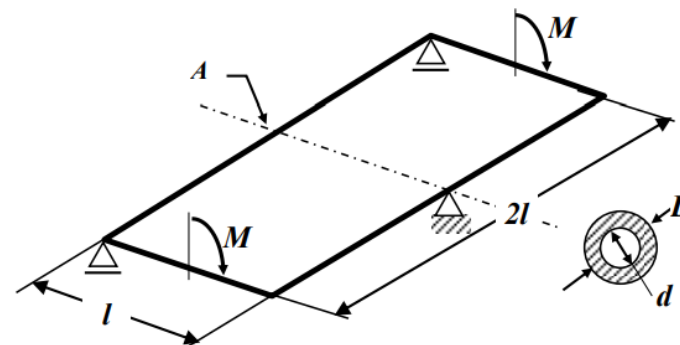
$P=4kN$
 $D=4cm$
 $d=0.5D$
 $\nu=0.3$
 $l=2m$
 $E=2 \cdot 10^5 MPa$



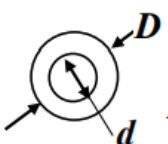
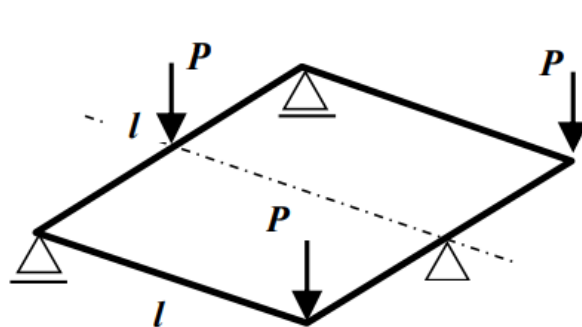
$\varnothing d=4cm$
 $E=2 \cdot 10^5 MPa$
 $\nu=0.3$



$M=2kN$
 $D=4cm$
 $d=0.5D$
 $\nu=0.3$
 $l=2m$
 $E=2 \cdot 10^5 MPa$

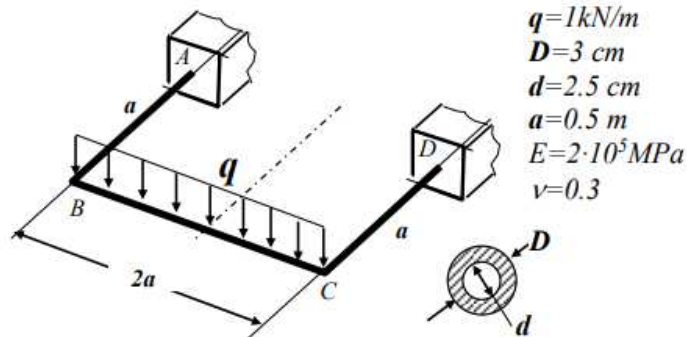
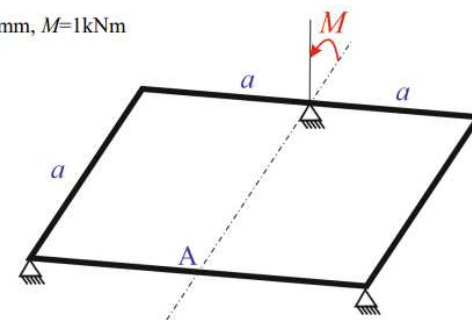
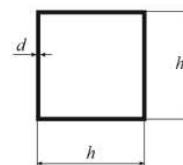


$M=2kN$
 $D=4cm$
 $d=0.5D$
 $\nu=0.3$
 $l=2m$
 $E=2 \cdot 10^5 MPa$



$P=2kN$
 $D=4cm$
 $d=0.5D$
 $\nu=0.3$
 $l=2m$
 $E=2 \cdot 10^5 MPa$

Dane:
 $a=1m, h=50mm, d=2mm, M=1kNm$
 $E=2 \cdot 10^5 MPa, \nu=0,3$
 Przekrój prętów



$q=1kN/m$
 $D=3cm$
 $d=2.5cm$
 $a=0.5m$
 $E=2 \cdot 10^5 MPa$
 $\nu=0.3$

Przykład zadań z egzaminów (*symetria konstr.* i *antysymetria obciążenia*)

